Exponencial Complexa

Fórmula de Euler

$$\boxed{\mathrm{Exp}(i\theta) = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}}$$

Definição: Define-se a **exponencial complexa**, $\mathrm{Exp} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como a função que, para cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$, é dada por

$$\mathrm{Exp}(z) = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y).$$

Proposição: A função Exp : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisfaz as seguintes propriedades

- $\text{Exp}(z+w) = \text{Exp}(z)\text{Exp}(w)$, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$.
- $(\text{Exp}(z))^{-1} = \frac{1}{\text{Exp}(z)} = \text{Exp}(-z)$.
- $(\text{Exp}(z))^k = \text{Exp}(kz), \qquad k \in \mathbb{Z}$.
- $\overline{\text{Exp}(z)} = \text{Exp}(\bar{z})$.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $\text{Exp}(z) \neq 0$.
- $|\text{Exp}(x+iy)| = e^x, \qquad \text{Arg}(\text{Exp}(x+iy)) = y + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.
- $\text{Exp}(z) = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi k\, i, \quad k \in \mathbb{Z}$.
- Exp é uma função periódica,

$$\text{Exp}(z + 2\pi k\, i) = \text{Exp}(z), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Passaremos, por abuso de notação, a escrever como em $\mathbb{R}$

$$\text{Exp}(z) = e^z.$$

Em particular tem-se

Identidade de Euler

$$\boxed{e^{\pi i} + 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad e^{2\pi i} = 1}$$

Funções Trigonométricas

Definição: Definem-se as **funções trigonométricas coseno e seno complexas**, para cada $z \in \mathbb{C}$, como

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Proposição: Para todos $z, w \in \mathbb{C}$ tem-se

- $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$
- $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$
- $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cos z$
- $\operatorname{sen}(z + T) = \operatorname{sen} z \Leftrightarrow T = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\cos(z + T) = \cos z \Leftrightarrow T = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Funções Hiperbólicas

Definição: Definem-se as **funções hiperbólicas complexas coseno e seno** , para cada $z \in \mathbb{C}$, como

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Proposição: Para todos $z, w \in \mathbb{C}$ tem-se

- $\cos(i\,z) = \cosh z \qquad \operatorname{sen}(i\,z) = i \operatorname{senh} z$
- $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$
- $\cosh(z + w) = \cosh z \, \cosh w + \operatorname{senh} z \, \operatorname{senh} w$
- $\operatorname{senh}(z + w) = \operatorname{senh} z \, \cosh w + \operatorname{senh} w \, \cosh z$
- $\operatorname{senh}(z + T) = \operatorname{senh} z \Leftrightarrow T = 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\cosh(z + T) = \cosh z \Leftrightarrow T = 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}$

Logaritmo Complexo

Definição: Define-se o **logaritmo complexo com ramo** $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ como a função log $: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\log_{\mathbb{C}}(z) = \log_{\mathbb{R}}|z| + i \operatorname{Arg} z, \qquad \operatorname{Arg} z \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[.$$

Chama-se **ramo principal do logaritmo complexo** à escolha do ramo $]-\pi, \pi]$.

Proposição:

- $e^{\log z} = z$ para todo o $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- $\log(e^z) = z + 2\pi k\, i$ para todo o $z \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{Z}$ dependente de z.

Proposição: Para $z, w \in \mathbb{C}$

$$\log zw = \log z + \log w \qquad (\text{a menos de soma de } 2\pi k i).$$

Potências Complexas

Definição: Dados $z \neq 0, w \in \mathbb{C}$ define-se a **potência complexa** z^w como

$$z^w = e^{w \log z}.$$

Esta definição depende do ramo do logaritmo complexo utilizado.

Proposição: Dados $z \neq 0, w \in \mathbb{C}$

- z^w toma um único valor, independentemente do ramo do logaritmo utilizado sse $w \in \mathbb{Z}$.
- Se $w \in \mathbb{Q}$, com $w = p/q$ na forma irredutível, então z^w toma $q \in \mathbb{N}$ valores diferentes consoante o ramo do logaritmo.
- Se $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou $\mathrm{Im}(w) \neq 0$ então z^w toma infinitos valores diferentes consoante o ramo do logaritmo.